

Szereg czasowy i jego parametry

1 Podstawowe parametry szeregu czasowego

Szeregiem czasowym nazywamy uporządkowany zbiór obserwacji danej wielkości zarejestrowanej w odstępach czasowych, najczęściej regularnych.

1. Wartość średnia szeregu czasowego X_t i sygnału ciągłego $x(t)$ w przedziale

$$\bar{x} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \quad x_{sr}(t) = \frac{1}{tk - t_0} \int_{t_0}^{tk} x(t) dt \quad (1)$$

2. Energia szeregu czasowego i sygnału ciągłego

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \quad E = \int_{t_0}^{tk} |x(t)|^2 dt \quad (2)$$

3. Moc średnia w przedziale

$$P_x(n_1, n_2) = \overline{x^2} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2 \quad (3)$$

4. Wariancja sygnału wokół $\bar{x}$ w przedziale

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \bar{x}]^2 dt$$
$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} [x[n] - \bar{x}]^2 \quad (4)$$

5. Momenty zwykłe m -tego rzędu

$$\bar{\tau}_x^m = \int_{-\infty}^{+\infty} t^m x(t) dt \quad \bar{k}_x^m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^m x[n] \quad (5)$$

2 Podstawowe szeregi syntetyczne

1. sygnał prostokątny o amplitudzie A , szerokości S i środku tw :

$$\Pi(t) = \begin{cases} A & dla \quad |t - tw| < 0.5 \cdot S \\ 0.5 \cdot A & dla \quad |t - tw| = 0.5 \cdot S \\ 0.0 & dla \quad |t - tw| > 0.5 \cdot S \end{cases} \quad (6)$$

2. sygnał trójkątny o szerokości S , amplitudzie A i wierzchołku tw :

$$\Lambda(t) = \begin{cases} A \cdot \left(1 - \frac{2|t-tw|}{S}\right) & dla \quad |t - tw| \leq 0.5 \cdot S \\ 0.0 & dla \quad |t - tw| > 0.5 \cdot S \end{cases} \quad (7)$$

3. sygnał harmoniczny o modulowanej amplitudzie $A(t)$, częstotliwości f i przesunięciu fazowym φ_0 :

$$y(t) = A(t) \cdot \sin(2\pi \cdot f(t) \cdot t + \varphi_0) \quad (8)$$

4. sygnał $\text{sinc}(t)$:

$$\text{sinc}(\omega_0 t) = Sa(\omega_0 t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t = 0 \\ \frac{\sin(\omega_0 \cdot t)}{\omega_0 \cdot t} & \text{dla } t \neq 0 \end{cases} \quad (9)$$

5. funkcja (rozkład) Gaussa (μ - średnia, σ - odchylenie standardowe):

$$x(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (10)$$

6. Funkcja piłokształtna o okresie T i amplitudzie A

$$x(t) = \frac{A}{T} \cdot (t \text{ modulo } T) \quad (11)$$

7. Błądzenie losowe z dryftem ($N(0, \sigma^2)$ - liczba z rozkładu normalnego o zerowej średniej i wariancji σ^2 , δ - wartość dryftu)

$$x[n] = x[n - 1] + N(0, \sigma^2) + \delta \quad (12)$$

3 Rodzaje szumu

1. szum biały - zbiór nieskorelowanych wartości wygenerowanych z rozkładu normalnego o zerowej średniej i odchyleniu standardowym σ .
2. szum impulsowy - krótkotrwałe zakłócenie o wysokiej amplitudzie A , rozłożone w miarę równomiernie z prawdopodobieństwem (gęstością) d .

4 Reprezentacja szeregu czasowego w MatLAB (time table) i użyteczne funkcje

Równomiernie próbkowany szereg czasowy może być przedstawiony jako zwykły wektor. W przypadku konieczności przypisania pomiarom (próbki) konkretnej daty lub gdy dane cechują się nierównomiernym próbkowaniem lub nieciągłością zapisu, konieczne jest zastosowanie reprezentacji `timetable` - `TT`.

Podstawowymi funkcjami są:

- `TT = timetable(datetime, zmienne)` do tworzenia struktury;
- `TT = readtimetable(plik)` do wczytywania danych z pliku i `writetimetable(TT, plik)`
- `a = readtable(plik, opcje)` - wczytywanie "awaryjne" plików
- `TT = addvars(TT, kolumna)` - dodanie danych do struktury;
- `TT = renamevars(TT, 'stara_nazwa', 'nowa_nazwa')` - zmiana nazwy kolumny;
- `TT2 = retime(TT, krok, metoda)` - przepróbkowanie z interpolacją lub agregacją danych;
- `TT = fillmissing(TT, metoda)` - uzupełnienie brakujących danych. Metody: 'previous', 'next', 'nearest', 'linear', 'spline'
- `summary(TT)` - statystyki opisowe danych;

- `randn(W,K)` - macierz o W wierszach i K kolumnach z liczbami pseudolosowymi z rozkładu normalnego o średniej $\mu = 0$ i wariancji $\sigma^2 = 1$. Skalowania na rozkład o średniej μ i odchyleniu standardowym σ :
$$N(\mu, \sigma) = \mu + \sqrt{\sigma^2} \cdot N(0, 1)$$
- `datetime` - stworzenie danych czasowy.

5 Zadania

1. Oblicz (matematycznie oraz w MatLAB) wartość średnią i energię ($t = \langle -10, 10 \rangle$ s, $Fs = 100$ Hz) dla szeregu o kształcie:
 - sygnału prostokątnego o amplitudzie 2, szerokości 6 s i środka dla $t=1$ s;
 - sygnału prostokątnego o amplitudzie 2-i, szerokości 4 s, środek w 5 s;
 - sygnału trójkątnego o amplitudzie 3, szerokości 4 s i środka dla $t=0$ s;
 - sygnału: $x(t) = (1+i) \cdot t/5$.
 - sygnału Gaussa ($\mu = -1$, $\sigma = 0.5$) - tylko MatLAB;
2. Stwórz wykres następujących sygnałów ($dt = 0.01$ [s], $t \in \langle 0, 10 \rangle$ [s]):
 - funkcji piłokształtnej o okresie 2 i amplitudzie 1.2;
 - sygnału harmonicznego dla amplitudy $A=1.3$ i częstotliwości $f=2.5$;
 - sygnału gaussa o wartości średniej $\mu=-2$ i odchyleniu standardowym $\sigma=2$.
 - szeregu błędzenia losowego z dryftem ($\sigma = 1.5$, $dryft = 0.02$ [1/s]);
3. Policz w MatLAB podstawowe statystyki opisowe (średnia, odchylenie standardowe, mediana, wartość minimalna i maksymalna) dla szeregów z zadań 4.1 i 4.2.
4. Stwórz jeden wykres zawierający następujące funkcje harmoniczne ($t = \langle 0, 10 \rangle$ s, $Fs = 50$ Hz):
 - amplituda = 1.0, częstotliwość = 20 Hz, kolor linii - czerwony;
 - amplituda = 0.9, częstotliwość = 25 Hz, kolor linii - zielony;
 - amplituda = 0.8, okres = 0.1 s, kolor linii - niebieski.
5. Stwórz szereg czasowy będący sumą sygnałów ($t \in \langle 0, 20 \rangle$, $Fs = 100$):
 - trójkątnego ($tw = 7$, szer. = 8, $A = 2$);
 - szumu białego ($\sigma^2 = 0.05$);
 - szumu impulsowego ($d = 0.02$, $A = 1$).Stwórz wykres. Zbadaj wpływ wartości parametrów szumu na wartości parametrów szeregu oraz jego kształt.
6. Pobierz i wczytaj następujące pliki. Następnie wyświetl je i wyciągnij wnioski. Podpisz osie - upewnij się, że oś pozioma jest osią czasu i zawiera daty. Wykres zanalizuj.
 - (a) *pasazer.txt*. Plik zawiera w pierwszej kolumnie rok, w drugiej miesiąc, w trzeciej ilość pasażerów obsługanych przez lotnisko w Balicach.
źródło danych: <https://www.krakowairport.pl/pl/miesieczne>. Znajdź dane i wykonaj podobne zadanie dla lotniska w Radomiu.
 - (b) *kursy.csv*. Plik zawiera kursy walut. Uzupełnij brakujące dane (weekendy i dni wolne). Porównaj średnie kursy ze stycznia na przestrzeni lat. źródło danych: <https://nbp.pl>
 - (c) Pobierz i wczytaj plik *kroki.txt*. Stwórz wykresy: miesięcznej i tygodniowej ilości kroków; średniej ilości kroków w danym miesiącu;