Procesy liniowe

1 Proces autoregresyjny (AR)

Modelem (procesem) autoregresyjnym nazywamy stacjonarny szereg czasowy x_t, gdzie każda wartość jest liniową kombinacją wartości wyrazów poprzednich i składnika losowego ϵ. Model AR rzędu p dany jest wzorem:

$$x_t = \varphi_0 + \varphi_1 \cdot x_{t-1} + \varphi_2 \cdot x_{t-2} + ... + \varphi_p \cdot x_{t-p} + \epsilon_t \tag{1}$$

Składnik losowy ϵ_t musi być niezależny od chwili czasowej i na ogół zakłada się, że pochodzi on z rozkładu normalnego $N(0, \sigma_\epsilon^2)$. Powinien on spełniać warunek, że dla wartość jego kowariancji dla dwóch różnych chwil czasowych wynosi 0, tj. $\mathrm{cov}(\epsilon_k, \epsilon_n) = 0$ dla $k \neq n$.

Proces AR(p) jest stacjonarny, gdy pierwiastki równania charakterystycznego mają moduły z poza kołem jednostkowym, tj. $|z| > 1$, tj.

$$1 - \varphi_1 \cdot z - \varphi_2 \cdot z^2 - ... - \varphi_p \cdot z^p = 0 \tag{2}$$

Warunkami równoważnymi są dla modelu AR(1):

$$|\varphi_1| < 1 \tag{3}$$

i dla AR(2):

$$|\varphi_2| < 1 \ \wedge \ |\varphi_1| + \varphi_2 < 1 \tag{4}$$

W przypadku szeregów o bardziej skomplikowanej naturze, można zastosować testy statystyczne, np. test Dickeya-Fullera: `[h, pvalue] = adftest(x)`.
Wartość $h = 0$ mówi nam, że nie mamy podstaw do odrzucenia tezy o istnieniu pierwiastka jednostkowego, czyli, że proces prawdopodobnie jest niestacjonarny.

Innym testem jest test KPSS (Kwiatkowski, Phillips, Schmidt & Shin), gdzie hipoteza zerowa mówi o stacjonarności szeregu (odwrótnie niż w ADF). W MatLAB ten test wykonujemy poleceniem: `h = kpsstest(x)`.

Innym narzędziem do oceny stacjonarności szeregu jest wykres funkcji autokorelacji, gdzie wartości powinny przypominać sinusoidę o malejącej amplitudzie. Do tworzenia takiego wykresu służy polecenie: `autocorr(x)`. Wykres jest tworzony automatycznie tylko wtedy, jeśli nie odbieramy z funkcji żadnych wartości (funkcja typu void).

Jeżeli proces jest stacjonarny, wtedy możemy obliczyć wartość średnią μ:

$$\mu = \frac{\varphi_0}{1 - \sum_{k=1}^{p} \varphi_k} \tag{5}$$

Wariancja zależy od rzędu modelu AR:

$$AR(1): \ \mathrm{var}(x) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \varphi_1^2} \qquad AR(p): \ \mathrm{var}(x) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \sum_{k=1}^{p} \varphi_k \cdot \rho_k} \tag{6}$$

copyright: M. Dwornik
dwornik@agh.edu.pl

2 Proces średniej ruchomej (MA)

Proces średniej ruchomej (MA) rzędu q dany jest wzorem:

$$x_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \cdot \epsilon_{t-1} + \theta_2 \cdot \epsilon_{t-2} + ... + \theta_q \cdot \epsilon_{t-q} \tag{7}$$

Każdy proces MA jest z definicji stacjonarny. Do najważniejszych parametrów modelu MA należą:

- średnia μ;
- wariancja:
$$\mathrm{var}(x) = \sigma^2 \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + ... + \theta_q^2\right) \tag{8}$$
- funkcja autokorelacji procesu MA rzędu q:
$$\rho_1 = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} \quad dla\ MA(1) \tag{9}$$
$$\rho_1 = \frac{\theta_1 \cdot (1+\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \quad \rho_2 = \frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \quad dla\ MA(2) \tag{10}$$
$$\rho_k = \frac{\theta_k + \sum_{n=1}^{q-k} \theta_n \cdot \theta_{n+k}}{1 + \sum_{n=1}^{q} \theta_n^2} \quad dla\ MA(q) \tag{11}$$
We wszystkich tych przypadkach $\rho_0 = 1$ oraz $\rho_k = 0$ dla $k > q$

3 Dualność AR,MA

Każdy model MA(q) o skończonej wartości q można przedstawić za pomocą modelu AR(∞) o nieskończonym rzędzie (dualność z AR - równ.12). I odwrotnie, każdy stacjonarny proces AR(p) można przedstawić za pomocą modelu średniej ruchomej o niekończonym rzędzie MA(∞) - równ.13.

$$x_t = \epsilon_t + \sum_{k=1}^{\infty} (-\psi_k) \cdot y_{t-k} \tag{12}$$

oraz

$$x_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \cdot \epsilon_{t-k} \quad dla \sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k| < \infty \wedge \mathrm{cov}(\epsilon_k, \epsilon_n) = 0\ dla\ k \neq n \tag{13}$$

W przypadku przekształcenie MA->AR wymagane jest sprawdzenie, czy moduły pierwiastków równania charakterystycznego (równ. 2) mają wartości większe od 1, tj. $|z| > 1$.

3.1 AR(1) -> MA(∞)

Dla szeregu typu AR(1) przekształcenie w MA(∞) odbywa się w kilku krokach:
1) sprawdzamy stacjonarność procesu, tj. $|\varphi_1| < 1$
2) liczymy średnią μ z procesu AR(1) - równ. 5: $\mu = \varphi_0/(1-\varphi_1)$
3) rozwijamy w szereg zgodnie z równ. 13 dla: $\psi_k = \varphi_1^k$
Dla przykładu powyższe szeregi są tożsame:

$$AR(1): \ x_t = 5 - 0.3 \cdot x_{t-1} + \epsilon_t \quad \Leftrightarrow \quad MA(\infty): x_t = \frac{50}{13} + \sum_{k=0}^{\infty} (0.3)^k \cdot \epsilon_{t-k} \tag{14}$$

3.2 AR(2) -> MA(∞)

Dla szeregu typu AR(2) przekształcenie w MA(∞) odbywa się w kilku krokach:
1) sprawdzamy stacjonarność procesu, tj. $|\varphi_2| < 1 \wedge |\varphi_1| + \varphi_2 < 1$
2) liczymy średnią μ z procesu AR(1) - równ. 5: $\mu = \varphi_0/(1 - \varphi_1 - \varphi_2)$
3) rozwijamy w szereg zgodnie z równ. 13 dla: ψ_k danego iteracyjnie:

$$\psi_k = \varphi_1 \cdot \psi_{k-1} + \varphi_2 \cdot \psi_{k-2} \qquad \psi_0 = 1 \quad \psi_1 = \varphi_1 \tag{15}$$

Dla przykładu powyższe szeregi są tożsame:

$$AR(2): \; x_t = -0.4 \cdot x_{t-1} + 0.5 \cdot x_{t-2} + \epsilon_t \tag{16}$$

$$MA(\infty): x_t = 0 + \epsilon_t - 0.4 \cdot \epsilon_{t-1} + 0.66 \cdot \epsilon_{t-2} - 0.464 \cdot \epsilon_{t-3} + ... \tag{17}$$

3.3 MA(1) -> AR(∞)

Dla szeregu typu MA(1) przekształcenie w AR(∞) odbywa się w kilku krokach:
1) sprawdzamy stacjonarność procesu, tj. $|\theta| < 1$
2) sprawdzamy warunek odwracalności: |z|>1 dla równania: $1 + \theta \cdot z = 0$
3) rozwijamy w szereg zgodnie z równ. 12: Dla przykładu powyższe szeregi są tożsame:

$$MA(1): \; x_t = \epsilon_t + 0.3 \cdot \epsilon_{t-1} \quad \Leftrightarrow \quad AR(\infty): x_t = \epsilon_t - \sum_{k=1}^{\infty} (-0.3)^k \cdot x_{t-k} \tag{18}$$

3.4 MA(2) -> AR(∞)

Dla szeregu typu MA(2) przekształcenie w AR(∞) odbywa się w kilku krokach:
1) sprawdzamy warunek odwracalności procesu, tj. $|\varphi_2| < 1 \wedge |\varphi_1| + \varphi_2 < 1$
3) rozwijamy w szereg zgodnie z równ. 12 dla: ψ_k danego iteracyjnie:

$$\psi_k = -\theta_1 \cdot \psi_{k-1} - \theta_2 \cdot \psi_{k-2} \qquad przy: \psi_1 = \theta_1 \qquad \psi_2 = \theta_2 - \theta_1 \cdot \psi_1 \tag{19}$$

Dla przykładu powyższe szeregi są tożsame:

$$MA(2): \; x_t = \epsilon_t + 0.5 \cdot \epsilon_{t-1} + 0.2 \cdot \epsilon_{t-2} \tag{20}$$

$$AR(\infty): x_t = \epsilon_t + 0.5 \cdot x_{t-1} - 0.05 \cdot x_{t-2} - 0.075 \cdot x_{t-3} + ... \tag{21}$$

4 Zadania

1. Sprawdź stacjonarność procesów AR. Dla procesów AR(1) policz średnią i wariancję. Wyniki sprawdź korzystając z pakietu MatLAB

$$x_t = 2 + \frac{1}{4} x_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 1) \tag{22}$$

$$x_t = 0.4 \cdot x_{t-1} + 0.6 \cdot x_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 0.25) \tag{23}$$

$$x_t = 0.6 \cdot x_{t-1} - 0.25 \cdot x_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 2) \tag{24}$$

$$x_t = 0.1 \cdot x_{t-1} - 0.5 \cdot x_{t-2} + 0.05 \cdot x_{t-3} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 1) \tag{25}$$

$$x_t = 0.1 \cdot x_{t-1} - 0.2 \cdot x_{t-2} + 0.3 \cdot x_{t-3} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 1) \tag{26}$$

$$x_t = 1.5 \cdot x_{t-1} + 1.5 \cdot x_{t-2} - x_{t-3} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 1) \tag{27}$$

copyright: M. Dwornik
dwornik@agh.edu.pl

2. Policz średnią, wariancję i wartości funkcji autokorelacji. Wyniki sprawdź korzystając z pakietu MatLAB

$$x_t = -2 + \epsilon_t - 0.7 \cdot \epsilon_{t-1}, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 1) \tag{28}$$

$$x_t = \epsilon_t - 0.5 \cdot \epsilon_{t-1} + 0.25 \cdot \epsilon_{t-2}, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 2) \tag{29}$$

$$x_t = 1 + \epsilon_t - 0.25 \cdot \epsilon_{t-1} + 0.5 \cdot \epsilon_{t-2}, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 2) \tag{30}$$

$$x_t = 0.5 + \epsilon_t - 0.4 \cdot \epsilon_{t-1} + 0.2 \cdot \epsilon_{t-2} - 0.1 \cdot \epsilon_{t-3}, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 1) \tag{31}$$

$$x_t = \epsilon_t + 0.1 \cdot \epsilon_{t-1} - 0.2 \cdot \epsilon_{t-2} + 0.3 \cdot \epsilon_{t-3}, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 2) \tag{32}$$

3. Rozwiń szereg x_t typu AR, o ile jest stacjonarny, w nieskończony proces MA. Policz średnią i wariancję. Wyniki sprawdź w MatLAB porównując średnią i wariancję obu szeregów.

$$x_t = 2 - 0.2 \cdot x_{t-1} + \epsilon_t \qquad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 2) \tag{33}$$

$$x_t = 0.5 - 0.5 \cdot x_{t-1} + \epsilon_t \qquad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 2) \tag{34}$$

$$x_t = 1.5 + 0.4 \cdot x_{t-1} + \epsilon_t \qquad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 1) \tag{35}$$

$$x_t = 0.3 \cdot x_{t-1} - 0.7 \cdot x_{t-2} + \epsilon_t \qquad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 1) \tag{36}$$

$$x_t = -0.4 \cdot x_{t-1} + 0.5 \cdot x_{t-2} + \epsilon_t \qquad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 1) \tag{37}$$

$$x_t = 0.4 \cdot x_{t-1} + 0.6 \cdot x_{t-2} + \epsilon_t \qquad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 = 1) \tag{38}$$

4. Rozwiń szereg x_t typu MA, o ile jest to możliwe, w nieskończony proces AR. Wyniki sprawdź w MatLAB porównując średnią i wariancję obu szeregów.

$$x_t = \epsilon_t - 0.4 \cdot \epsilon_{t-1} \qquad \epsilon_t = N(0, \sigma^2 = 2); \tag{39}$$

$$x_t = \epsilon_t + 0.5 \cdot \epsilon_1 + 0.2 \cdot \epsilon_2 \quad \epsilon_t = N(0, \sigma^2 = 1); \tag{40}$$

$$x_t = \epsilon_t + 0.3 \cdot \epsilon_1 - 0.1 \cdot \epsilon_2 \quad \epsilon_t = N(0, \sigma^2 = 1); \tag{41}$$

$$x_t = \epsilon_t - 0.4 \cdot \epsilon_1 + 0.3 \cdot \epsilon_2 \quad \epsilon_t = N(0, \sigma^2 = 1); \tag{42}$$