Zagadnienia na kolokwium

1 Kolokwium teoretyczne - 40 pkt, 45 minut

Kolokwium teoretyczne będzie składało się z 3 zadań. Dozwolony jest prosty kalkulator (nie w telefonie/tablecie/etc) bez funkcji trygonometrycznych. Zadania będą obejmowały następujące zagadnienia:

- średnia i energia sygnałów (ciągłe i dyskretne; rzeczywiste i zespolone; zdefiniowane wzorem, wykresem lub opisowo);
- splot i korelacja wektorów (rzeczywiste i zespolone);
- obliczenia funkcji autokorelacji;
- obliczenia współczynników PACF;
- obliczenia współczynników modelu AR;
- badania stacjonarności modeli AR, średniej modeli AR, dla AR(1) dodatkowo wariancja;
- obliczenia średniej wariancji i współczynników funkcji autokorelacji dla modelów MA;
- dualność AR <-> MA dla modeli AR($P \leqslant 2$) i MA($Q \leqslant 2$);
- rozwijanie funkcji w szereg Fouriera (zdefiniowanych wzorem, graficznie lub opisowo);
- obliczenia DFT dla wektorów 3 i 4 elementowych;
- obliczenia wartości modelu regresji liniowej (obowiązuje od II terminu).

2 Zadania powtórkowe - teoria

2.1 Parametry

Oblicz średnią i energię następujących funkcji (w przypadku funkcji dyskretnych załóż $Fs = 20$ Hz). Wynik sprawdź w MatLAB:

- $x(t) = 1 + 2i \cdot t$ dla $t \in \langle 0, 5\rangle$
- $x(t) = 2\sin^2(2t)$ dla $t \in \langle 0, \pi/4\rangle$ **(tylko ciągły)**
- trójkąt (tw = 5s, szer = 4s, amp = 2) dla $t \in \langle 0, 8\rangle$
- trójkąt (szer. =4, amp.=3, tw=2) dla $F_S = 10$ i $t \in \langle -2, 10\rangle$
- funkcja piłokształtna o okresie 2s i amplitudzie 3 dla $t \in \langle 0, 8\rangle$
- $x(t) = (3 + i) \cdot t$ dla $t \in \langle 0, 6\rangle$
- $x(t) = (3 - i \cdot t)^2$ dla $t \in \langle -2, 4\rangle$
- x(t) ($Fs = 10$, $t \in \langle -4, 6\rangle$):

$$x(t) = \begin{cases} 2t \cdot \mathrm{sgn}(t) & dla \quad |t-1| \leqslant 2 \\ i \cdot (1 - \mathrm{sgn}(t)) & dla \quad |t-1| > 2 \end{cases} \tag{1}$$

2.2 Splot i korelacja

Policz splot i korelację następujących sygnałów:
x1 = [1+i, 1-i, -1+i, -1-i] z **y1 = [1, 2-i, 2+i]**
x2 = [3-i, 3, -2i, 3+i] z **y2 = [2+2i, 2-2i, 2i]**
x3 = [2-i, 3+4i, -12i, -2i] z **y3 = [1-2i, 1+2i, -3i]**
x4 = [-2, 1-i, 3i, 3] z **y4 = [1, 2-i, 2i]**
x5 = [-3+2i, 2-3i, -2, 1+i] z **y5 =[2, -2+3i, 3i]**

2.3 PACF

Policz wartości funkcji PACF dla modeli AR(2) i AR(3) dla poniższych wektorów. Wyniki sprawdź w MatLAB:
x1 = [2, 0, 0, -3, 1];
x2 = [-3, 2, 3, 3, 0, 1]
x3 = [-1, -2, 0, -3, 1]
x4 = [4, 0, 2, -2, 0, -1]

2.4 AR, AR->MA

1. Policz współczynniki modeli AR(2) i AR(3) dla wektorów z rozdziału PACF.

2. Sprawdź stacjonarność poniższych modeli AR. Dla każdego z nich policz średnią, a dla AR(1) dodatkowo wariancję. Jeśli to możliwe, przekształć w szereg MA(∞) dla modeli AR(1) i AR(2).
   $x_t = -2 + 0.25 \cdot x_{t-1} + N(0, 1)$
   $x_t = 1 - 0.4 \cdot x_{t-1} + N(0, 2)$
   $x_t = 1 - 0.4 \cdot x_{t-1} - 0.5 \cdot x_{t-2} + N(0, 1)$
   $x_t = -1 + 0.4 \cdot x_{t-1} + 0.7 \cdot x_{t-2} + N(0, 1)$
   $x_t = 1 - 0.25 \cdot x_{t-1} - 0.6 \cdot x_{t-2} + N(0, 1)$
   $x_t = 0.25 \cdot x_{t-1} + 0.4 \cdot x_{t-2} + N(0, 2)$
   $x_t = 1 + 0.25 \cdot x_{t-1} + 0.4 \cdot x_{t-2} + N(0, 2)$
   $x_t = 1.9 - 1.5 \cdot x_{t-1} - 0.1 \cdot x_{t-2} + 0.2 \cdot x_{t-3} + N(0, 2)$

2.5 MA, MA->AR

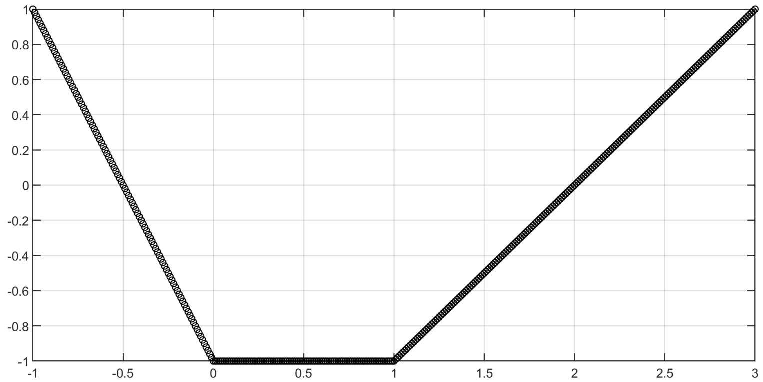
Policz średnią, wariancję i wartości funkcji autokorelacji dla następujących szeregów czasowych. Dla modeli MA(1) i MA(2), o ile to wykonywalne, przekształć dodatkowo w model AR(∞). Wyniki sprawdź w MatLAB
$x_t = \epsilon_t - 0.6 \cdot \epsilon_{t-1}, \quad \epsilon_t \sim N(0, 1)$
$x_t = \epsilon_t + 0.75 \cdot \epsilon_{t-1}, \quad \epsilon_t \sim N(0, 2)$
$x_t = \epsilon_t - 1.5 \cdot \epsilon_{t-1}, \quad \epsilon_t \sim N(0, 1)$
$x_t = \epsilon_t - 0.6 \cdot \epsilon_{t-1} + 0.3 \cdot \epsilon_{t-2}, \quad \epsilon_t \sim N(0, 1)$
$x_t = \epsilon_t - 0.3 \cdot \epsilon_{t-1} + 0.6 \cdot \epsilon_{t-2}, \quad \epsilon_t \sim N(0, 1)$
$x_t = \epsilon_t + 0.2 \cdot \epsilon_{t-1} + 0.2 \cdot \epsilon_{t-2}, \quad \epsilon_t \sim N(0, 2)$
$x_t = \epsilon_t + 0.5 \cdot \epsilon_{t-1} - 0.25 \cdot \epsilon_{t-2}, \quad \epsilon_t \sim N(0, 2)$
$x_t = \epsilon_t + 0.5 \cdot \epsilon_{t-1} - 0.25 \cdot \epsilon_{t-2} + 0.125 \cdot \epsilon_{t-3}, \quad \epsilon_t \sim N(0, 2)$
$x_t = \epsilon_t + 0.2 \cdot \epsilon_{t-1} - 0.3 \cdot \epsilon_{t-2} - 0.1 \cdot \epsilon_{t-3}, \quad \epsilon_t \sim N(0, 1)$

2.6 Szereg Fouriera

Rozwiń w szereg Fouriera, a następnie zaimplementuj w pakiecie MatLAB, poniższe sygnały (x3 - graficznie; $\mathbf{H(t)} = \{0 \; dla \; t < 0; \;\; 1 \; dla \; t \geqslant 0\}$):

$$x_1(t) = \begin{cases} 2t & dla \; t \in < 0, 1) \\ 2 & dla \; t \in < 1, 3) \\ 0 & dla \; t \in < 3, 6) \end{cases} \tag{2}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} (t^2 - 1) \cdot sgn(t) & dla \quad 1 \leqslant |t| < 3 \\ (t^2 - 1) \cdot H(t-2) & dla \quad\quad |t| < 1 \end{cases} \tag{3}$$



Rysunek 1: Sygnał x3(t) do rozwinięcia w szereg Fouriera.

$$x_4(t) = \mathrm{sgn}(2t) \cdot t^2 \quad dla \; |t| \leqslant 4 \tag{4}$$

$$x_5(t) = H(-2t) \cdot trojkat(tw = 0, amp = 1, szer = 2) \quad dla \; t \in \langle -2, 4 \rangle \tag{5}$$

$$x_6(t) = \begin{cases} -2 & dla \quad t < 1 \\ 3 - 2 \cdot |t - 3| & dla \quad t \geqslant 1 \end{cases} \quad dla \; t \in \langle -1, 5 \rangle \tag{6}$$

$$x_7(t) = \begin{cases} 2 & dla \quad |t| \leqslant 1 \\ 2 \cdot t - 8 \cdot H(t-3) & dla \quad t > 1 \end{cases} \quad dla \; t \in \langle -1, 5 \rangle \tag{7}$$

$$x_8(t) = \mathrm{sgn}(2t) \cdot (t^2 + 4) - 1 \quad dla \; t \in \langle -3, 3 \rangle \tag{8}$$

2.7 DFT

Policz DFT dla wektorów **x** i **y** z rozdziału o splocie i korelacji.

2.8 Regresja liniowa

Policz wartości parametrow modelu regresji liniowej dla następujących par punktów / układów równań. (M1 - model liniowy, M2 - model kwadratowy, M3 - wielomianowy stopnia 3, XN - model N-zmiennych liniowych);

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \hline 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \quad dla \; modeli: M1, \; M2 \tag{9}$$

x	y
1	2
2	3
3	4
4	7
5	13

$$dla\ modeli : M1,\ M2,\ M3 \tag{10}$$

$x1$	$x2$	y
1	1	4
2	3	4
3	5	-4
4	3	0
5	4	-1

$$dla\ modeli : M1(wobec\ x1\ i\ x2),\ X2 \tag{11}$$